Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger
2006/2007-S_2

Département de Mathématiques
MIPC-GE-GM
M112

CONTRÔLE CONTINU N°1
(Durée 2H30')

Recommandations : Laissez une marge à gauche pour la correction. Mettez le numéro de l'exercice et le numéro de la question avant de répondre. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

<u>Toute fraude ou tentative de fraude sera sévèrement sanctionnée.</u>

Exercice I *On considère la fonction* $f : x \in [0, +\infty[\to f(x) = \dfrac{7x+9}{3x+4}$.

1. *Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.*
   On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & , \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} w_{n+1} = f(w_n) & , \quad n \in \mathbb{N}, \\ w_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

2. *Etudier la monotonie de $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$*
3. *Montrer que ces deux suites sont convergentes et déterminer leurs limites.*
   On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{1+v_n} & , \quad n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

4. *Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} = u_n$ et $v_{2n+1} = w_n$.*
5. *En déduire que $(v_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.*

Exercice II *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant*

$$g'(x) = 1 + g(x) + g(x)^2 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *On suppose que $g(0) = 0$. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 4 en 0.*

Exercice III 1. *En appliquant convenablement le théorème des accroissents finis, montrer que*

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad , \quad \forall x > 0$$

2. *Déteminer la limite*

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{(\sin x)^2}}$$

Exercice IV *On considère la fonction* $\varphi(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x+2}{x}\right|\right) - \dfrac{1}{x+2}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de φ et étudier ses limites aux bornes du domaine.*
2. *Calculer les dérivées première et seconde de φ.*
3. *En déduire, s'ils existent, les maximum, les minimum et les points d'inflexion de φ.*
4. *Dresser le tableau de variations de φ.*



Exercice 1 1/ $f(x) = \frac{7x+9}{3x+4}$ $\begin{cases} U_0 = 1 ; \; U_{n+1} = f(U_n) & n \geq 0 \\ W_0 = \frac{5}{2} , \; W_{n+1} = f(W_n) & n \geq 0 \end{cases}$

$\forall x \in [0,+\infty[\; : \; f'(x) = \frac{1}{(3x+4)^2} > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2/ * $U_0 = 1$; $U_1 = f(U_0) = f(1) = \frac{16}{7}$

Montrons par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$

- On a $U_1 > U_0$ car $\frac{16}{7} > 1$
- Supposons que $U_{n+1} > U_n$ et m.que $U_{n+2} > U_{n+1}$

Or $U_{n+1} > U_n$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ càd $U_{n+2} > U_{n+1}$

* $W_0 = \frac{5}{2}$; $W_1 = f(W_0) = f(5/2) = \frac{53}{23}$

Montrons par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \; W_{n+1} < W_n$

- $W_1 < W_0$ car $\frac{53}{23} < 5/2$
- Supposons que $W_{n+1} < W_n$ et m.q $W_{n+2} < W_{n+1}$

Or $W_{n+1} < W_n$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(W_{n+1}) < f(W_n)$ càd $W_{n+2} < W_{n+1}$

3/ M.que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 7/3$ et $0 \leq W_n \leq 5/2$

- Pour $n = 0$ $0 \leq U_0 \leq 7/3$ et $0 \leq W_0 \leq \frac{5}{2}$ bien verifiée
- Supposons pour n fixé : $0 \leq U_n \leq 7/3$ et $0 \leq W_n \leq 5/2$

f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\frac{7}{3})$ et $f(0) \leq f(W_n) \leq f(5/2)$

càd $\frac{9}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{76}{33}$ et $\frac{9}{4} \leq W_{n+1} \leq \frac{53}{23}$

Or $0 \leq \frac{9}{4}$ et $\frac{76}{33} \leq 7/3$; $\frac{53}{23} \leq \frac{5}{2}$ d'où $0 \leq U_{n+1} \leq 7/3$ et $0 \leq W_{n+1} \leq 5/2$

On a (U_n) croissante majorée donc convergente

et (W_n) decroissante minorée donc convergente

leur limite commune l verifie la relation $l = f(l)$

$l = \frac{7l+9}{3l+4} \rightarrow 3l^2 + 4l = 7l + 9 \Rightarrow l^2 - l - 3 = 0 \Rightarrow l = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

4/ • Pour $n = 0$: $V_0 = U_0$ et $V_1 = W_0$ bien verifiée

- Supposons $V_{2n} = U_n$ et $V_{2n+1} = W_n$ et m.que $V_{2n+2} = U_{n+1}$ et $V_{2n+3} = W_{n+1}$

On a : $V_{2n+2} = \frac{3+2V_{2n+1}}{1+V_{2n+1}} = \frac{3+2 \cdot \frac{3+2V_{2n}}{1+V_{2n}}}{1+\frac{3+2V_{2n}}{1+V_{2n}}} = \frac{9+7V_{2n}}{4+3V_{2n}} = f(V_{2n}) = f(U_n) = U_{n+1}$

et $v_{2n+3} = \dfrac{3+2v_{2n+2}}{1+v_{2n+2}} = \dfrac{3+2\cdot\frac{3+2v_{2n+1}}{1+v_{2n+1}}}{1+\frac{3+2v_{2n+1}}{1+v_{2n+1}}} = \dfrac{9+7v_{2n+1}}{4+3v_{2n+1}} = f(v_{2n+1}) = f(w_n) = w_{n+1}$

5/ D'après 3/ (u_n) et (v_n) ont la même limite $\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

d'où (v_{2n}) et (v_{2n+1}) (qui sont 2 suites extraites de v_n) convergent vers ℓ donc (v_n) converge vers ℓ

Exercice 2 g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1+g(x)+g(x)^2$

1/ Posons $P(x) = 1+x+x^2$ alors $g' = P\circ g$

. On a g dérivable et P dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $P\circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

d'où $P\circ g$ est continue c-à-d g' est continue $\Rightarrow$ g de classe $C^1(\mathbb{R})$

. Supposons que $g \in C^k(\mathbb{R})$ $\forall k \leq n$ et m.q. $g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$

On a $g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = (P\circ g)^{(n)}$

P et g sont de classe $C^k(\mathbb{R})$ $\forall k \leq n$ donc g est de classe $C^{n+1}(\mathbb{R})$

2/ $g(0) = 0$ $g'(0) = 1+g(0)+g(0)^2 = 1$; $g''(x) = g'(x)+2g(x)g'(x) \Rightarrow g''(0) = 1$

$g^{(3)}(x) = g''(x)+2g'(x)g'(x)+2g(x)g''(x) \rightarrow g^{(3)}(0) = 3$

$g^{(4)}(x) = g'''(x)+4g'(x)g''(x)+2g'(x)g''(x)+2g(x)g'''(x) \rightarrow g^{(4)}(0) = 9$

On a : $g(x) = g(0)+\frac{x}{1!}g'(0)+\frac{x^2}{2!}g''(0)+\frac{x^3}{3!}g^{(3)}(0)+\frac{x^4}{4!}g^{(4)}(0)+x^4\varepsilon(x)$

$= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{3}{8}x^4+x^4\varepsilon(x)$

Exercice 3 1/ $f(x) = \text{Arctan}\, x$. Soit $x>0$

f cont sur $[0,x]$, dériv sur $]0,x[$ donc d'après T.A.F $\exists\, \theta \in]0,x[$

tel que $f(x) - f(0) = (x-0)f'(\theta)$ c-à-d $\text{Arctan}\, x = \frac{x}{1+\theta^2}$

De plus $0<\theta<x$ ∴ $1<1+\theta^2<1+x^2$; $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\theta^2} < 1$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+\theta^2} < x \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan}\, x < x$

2/ $(\cos x)^{1/\sin^2 x} = e^{\ln(\cos x)^{1/\sin^2 x}} = e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}$

$\lim\limits_{0} \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim\limits_{0} \frac{(\ln\cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim\limits_{0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{0} -\frac{1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ✓.

Exercice 4 $\varphi(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{1}{x+2}$

1/ $x \in D_\varphi \iff \left|\frac{x+2}{x}\right| > 0$ et $x \neq 0$ et $x+2 \neq 0 \iff x \neq 0$ et $x \neq -2$

$D_\varphi = \mathbb{R} - \{0,-2\}$

• $\lim_{0} \left|\frac{x+2}{x}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{0} \varphi(x) = +\infty$

• $\lim_{(-2)^+} \left|\frac{x+2}{x}\right| = 0^+ \Rightarrow \lim_{(-2)^+} \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| = -\infty \Rightarrow \lim_{(-2)^+} \varphi(x) = (-\infty)-(+\infty) = -\infty$

• $\lim_{(-2)^-} \varphi(x) = \lim_{(-2)^-} \frac{(x+2)(\ln|x+2| - \ln|x|) - 1}{x+2} = \lim_{(-2)^-} \frac{(x+2)\ln|x+2| - (x+2)\ln|x| - 1}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

2/ $\varphi'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2/x^2}{\frac{x+2}{x}} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-x-4}{x(x+2)^2}$

$\varphi''(x) = \left(\frac{-x-4}{x^3+4x^2+4x}\right)' = \frac{(-x^3-4x^2-4x)-(-x-4)(3x^2+8x+4)}{(x^3+4x^2+4x)^2} = \frac{2(x^2+6x+4)}{x^2(x+2)^3}$

3/ et 4/   • $\varphi'(x) = 0 \iff x = -4$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
φ		↗		↘	‖	↘	‖	↘	

φ admet 1 maximum relatif en -4
de valeur $\varphi(-4) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}$

• $\varphi''(x) = 0 \iff x^2+6x+4 = 0$; $\Delta = 20$; $x_1 = -3-\sqrt{2}$, $x_2 = -3+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		-2		$-3+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
x^2+6x+4		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
φ''		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

les points d'inflexion sont $I(-3-\sqrt{2}, \varphi(-3-\sqrt{2}))$ et $J(-3+\sqrt{2}, \varphi(-3+\sqrt{2}))$

CC1   05-06   (Suite)

Exercice 1   a/ (U_n) suite de Cauchy $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geq m > N : |U_n - U_m| < \varepsilon$

b/ $\exists \varepsilon = 1/2$ / $\forall N \in \mathbb{N} :\ \exists n \in \mathbb{N}$ et $m = 2n \in \mathbb{N}$ telque

$|U_{2n} - U_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right| \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

donc (U_n) n'est pas 1 suite de Cauchy

Exercice 2   a/ soit $\varepsilon > 0$ existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ telque $\forall n > N : |U_n - 0| < \varepsilon$

or $|U_n - 0| < \varepsilon \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < \varepsilon \iff n \ln(3/4) < \ln \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 3/4}$

il suffit de prendre $N = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3/4} \right] + 1$

b/ i/ $U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

Pour $1 \le k \le n$ on a $1+n^2 \le k+n^2 \le n+n^2 \Rightarrow \frac{1}{n+n^2} \le \frac{1}{k+n^2} \le \frac{1}{1+n^2}$

$\Rightarrow \frac{n}{n+n^2} \le \frac{n}{k+n^2} \le \frac{n}{1+n^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+n^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{1+n^2}$

càd $n \cdot \frac{n}{n+n^2} \le U_n \le n \cdot \frac{n}{1+n^2}$ d'où $\frac{n^2}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

Or $\lim_{\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ alors $\lim_{\infty} U_n = 0$

ii/ On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et

$2\sqrt{n} \le \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \le 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$

càd $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \ge 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \le 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) \le \frac{1}{\sqrt{1}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\xrightarrow{\text{Somme}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2(\sqrt{n+1} - 1) \le \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\vdots$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ Ainsi $\lim_{+\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$

__Exercice 3__ $U_0 = 8$; $U_{n+1} = 6 + \sqrt{U_n}$

On pose $f(x) = 6 + \sqrt{x}$ et on résoud l'équation $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$

On trouve $x = 9$. Ainsi si (U_n) c.v vers ℓ alors $\ell = 9$

a/ * Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $8 \le U_n \le 9$

- $8 \le U_0 \le 9$ est bien vérifiée
- Supp $8 \le U_n \le 9$ et m.que $8 \le U_{n+1} \le 9$

On a $8 \le U_n \le 9$ et f croissante sur $[0, +\infty[$ $\left(f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \right)$

donc $f(8) \le f(U_n) \le f(9)$ càd $6 + \sqrt{8} \le U_{n+1} \le 9$

Or $8 \le 6 + \sqrt{8} \Rightarrow 8 \le U_{n+1} \le 9$

* Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} > U_n$ par récurrence

- $U_0 = 8$, $U_1 = f(U_0) = 6 + \sqrt{8}$ on a $U_1 > U_0$ donc la proposition est vraie pour $n=0$
- Supposons $U_{n+1} > U_n$ et m.q $U_{n+2} > U_{n+1}$

On a $U_{n+1} > U_n$ et f croissante sur $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow f(U_{n+1}) > f(U_n) \Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$

b/ (U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est c.v vers ℓ avec $8 \leq \ell \leq 9$ et $\ell = f(\ell)$ $\Rightarrow \ell = 9$

Exercice 4 $U_0 \in \mathbb{R}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\sin U_n + \frac{5}{2}$ $n \geq 0$

a/ • Montrons tout d'abord que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$

On considère la fct $u(x) = \sin x$ et on applique le T.A.F sur $[a,b]$

u est cont sur $[a,b]$, dériv sur $]a,b[$: $\exists c \in]a,b[: f(a)-f(b) = (a-b)f'(c)$

c.à.d $\sin a - \sin b = (a-b)\cos c$ d'où $|\sin a - \sin b| = |a-b||\cos c| \leq |a-b|$ car $|\cos c| \leq 1$

- Pour $n=0$ on a bien $|U_1 - U_0| \leq \frac{1}{2^0}|U_1 - U_0|$
- Supp. $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{2^n}|U_1 - U_0|$ et m.que $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|U_1 - U_0|$

On a: $|U_{n+2} - U_{n+1}| = \left|\left(\frac{1}{2}\sin(U_{n+1}) + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(U_n) + \frac{5}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|\sin U_{n+1} - \sin U_n|$

d'après l'inégalité démontrée au début : $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n|$

— " l'hypothèse de récurrence $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}|U_1 - U_0|$

d'où $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|U_1 - U_0|$

b/
$$\begin{aligned}
|U_{n+p} - U_n| &= |(U_{n+p} - U_{n+p-1}) + (U_{n+p-1} - U_{n+p-2}) + \dots + (U_{n+1} - U_n)| \\
&\leq |U_{n+p} - U_{n+p-1}| + |U_{n+p-1} - U_{n+p-2}| + \dots + |U_{n+1} - U_n| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+p-1}}|U_1 - U_0| + \frac{1}{2^{n+p-2}}|U_1 - U_0| + \dots + \frac{1}{2^n}|U_1 - U_0| \\
&\leq |U_1 - U_0|\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}}\right) = |U_1 - U_0| \cdot \frac{1}{2^n}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

d'où $|U_{n+p} - U_n| \leq |U_1 - U_0| \times \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \leq \frac{|U_1 - U_0|}{2^{n-1}}$ (car $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 1$)

c/ On a $\lim_{+\infty} \frac{|U_1 - U_0|}{2^{n-1}} = 0$ donc pour $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ $\forall n > N$: $\frac{|U_1 - U_0|}{2^{n-1}} < \varepsilon$

d'où $\forall p > 0$ $\forall n > N$: $|U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$ donc (U_n) est une suite de Cauchy donc (U_n) est convergente.

Exercice 5 a/ $U_{n+1}-U_n = \frac{1+U_n^2}{2} - U_n = \frac{1+U_n^2-2U_n}{2} = \frac{(U_n-1)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante

b/ Si $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^* : U_n = 1 \Rightarrow \lim_{\infty} U_n = 1$

Si $|\alpha|<1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^* : \quad 0<U_n<1$.

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ $(f'(x)=x\geq 0)$

- pour $n=1$ $\quad U_1 = \frac{1+\alpha^2}{2}$; $0<U_1<1$ est vraie car $\alpha^2<1$
- Supp $0<U_n<1$ alors $f(0)<f(U_n)<f(1) \Rightarrow \frac{1}{2}<U_{n+1}<1$

$\Rightarrow 0<U_{n+1}<1$

Ainsi (U_n) est croissante majorée donc convergente vers l telque

$l = f(l) \quad \Rightarrow l = 1$

- Si $|\alpha|>1$ càd $\alpha^2>1$ on montre par recurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^* : U_n > n$

Ainsi $\lim_{+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$; (U_n) diverge

Exercice 6 $\quad U_0>0$; $U_n = \ln(1+U_{n-1})$ $\quad n\geq 1$: $U_n = f(U_{n-1})$

Considérons $f(x) = \ln(1+x)$ definie sur $[0,+\infty[$

- $\forall x\in[0,+\infty[:\quad f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \quad \Rightarrow f$ est croissante sur $[0,+\infty[$
- Considérons $u(x) = \ln(1+x) - x \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ sur $[0,+\infty[$

d'où $u(x)$ est decroissante sur $[0,+\infty[$ donc

$\forall x\geq 0 \; : \; u(x) \leq u(0)$ $\quad$ càd $\ln(1+x)-x\leq 0 \Rightarrow \ln(1+x)\leq x$

a/ M.que $\forall n\geq 0$: $\quad U_{n+1}<U_n$

- Pour $n=0$ $\quad U_1 - U_0 = \ln(1+U_0) - U_0 \leq 0$ $\quad$ d'après le resultat precedent
- Supp $U_{n+1}<U_n$; Comme f est croissante alors : $f(U_{n+1})<f(U_n)$

càd $U_{n+2}<U_{n+1}$

b/ $\forall n\in\mathbb{N}$: $\quad U_n>0$

- $U_0>0$ est vraie
- Supp $U_n>0$ alors $U_n+1>1 \Rightarrow \ln(U_n+1)>0 \Rightarrow U_{n+1}>0$

(U_n) est une suite decroissante et minorée par 0 donc elle est C.V ./.

